Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 7 - 2 Dicembre 2013

1. Vediamo di risolvere le seguenti equazioni differenziali dopo aver visto come farlo nel caso generale.
   Consideriamo l'equazione differenziale

$$\mathbf{y'(x) + ay(x) = 0}.$$

Abbiamo che

$$y'(x) + ay(x) = 0 \Longleftrightarrow y'(x) = -ay(x) \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -a.$$

Essendo $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ otteniamo

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -a\ dx \Longleftrightarrow \log|y(x)| = -ax + c \Longleftrightarrow \mathbf{y(x) = ke^{-ax}}$$

ove $k = e^c$.
Nel caso in cui $\mathbf{a} = \mathbf{a(x)}$ procedendo nella stessa maniera otterremo

$$\mathbf{y(x) = ke^{-\int a(x)\ dx}}.$$

Tale metodo si chiama **Separazione di variabili**.
Ci sono peró altri tipi di equazioni differenziali che sfruttano questo metodo, ma a cui non basta per la completa risoluzione.
Se consideriamo l'equazione

$$\mathbf{y'(x) + ay(x) = f(x)}$$

otteniamo la sua risoluzione mediante il seguente procedimento:
imponiamo $y(x) = u(x)v(x)$ cosicché $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ e la nostra equazione diventa

$$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)+au(x)v(x) = f(x) \Longleftrightarrow v(x)[u'(x)+au(x)]+u(x)v'(x) = f(x).$$

Imponendo $u'(x) + au(x) = 0$ troviamo (sfruttando quanto fatto sopra) $\mathbf{u(x) = e^{-ax}}$, che sostituita nell'equazione ci da

$$v'(x) = f(x)e^{ax} \Longrightarrow \mathbf{v(x) = c + \int f(x)e^{ax}dx}$$

da cui

$$\mathbf{y(x) = u(x)v(x) = ce^{-ax} + e^{-ax}\int f(x)e^{ax}dx}.$$

Infine se l'equazione che dobbiamo risolvere é del tipo

$$\mathbf{y'(x) + a(x)y(x) = f(x)}$$

procedendo come appena fatto otteniamo che

$$\mathbf{u(x) = e^{-\int a(x)dx}}$$

e

$$\mathbf{v(x) = c + \int f(x)e^{\int a(\tilde{x})d\tilde{x}}dx}$$

per cui

$$\mathbf{y(x) = u(x)v(x) = ce^{-\int a(x)dx} + \left(e^{-\int a(x)dx}\right)\int f(x)e^{\int a(\tilde{x})d\tilde{x}}dx.}$$

Vista la risoluzione dei casi generici, applichiamola agli esercizi assegnati:

(a) $y'(x) - xy(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = x \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \log|y(x)| = \frac{x^2}{2} + c \Longleftrightarrow y(x) = ke^{\frac{x^2}{2}}$;

(b) $y'(x) + y(x) = e^x$. Se $y(x) = u(x)v(x)$ abbiamo che (sfruttando quanto visto nel caso generale)
$u(x) = e^{-x}$ e $v(x) = c + \int e^{2x}dx = c + \frac{e^{2x}}{2}$ da cui

$$y(x) = ce^{-x} + \frac{e^x}{2} \;;$$

(c) $y'(x) + 8y(x) = 6e^{-2x}$. Come sopra, imponendo $y(x) = u(x)v(x)$ abbiamo che
$u(x) = e^{-8x}$ e $v(x) = c + \int 6e^{6x}dx = c + e^{6x}$ da cui

$$y(x) = ce^{-8x} + e^{-2x} \;;$$

(d) $y'(x) + 5y(x) = 26\sin(x)$. Con la solita sostituzione otteniamo che
$u(x) = e^{-5x}$ e $v(x) = c + \int 26\sin(x)e^{5x}dx$.
Sia $A := \int \sin(x)e^{5x}dx = -\cos(x)e^{5x} + 5\int \cos(x)e^{5x}dx =$
$= -\cos(x)e^{5x} + 5[\sin(x)e^{5x} - 5\int \sin(x)e^{5x}dx]$.
Dunque $A = -\cos(x)e^{5x} + 5\sin(x)e^{5x} - 25A$ perció
$26A = e^{5x}(5\sin(x) - \cos(x))$.
Quindi $v(x) = c + e^{5x}(5\sin(x) - \cos(x))$, da cui

$$y(x) = ce^{-5x} + 5\sin(x) - \cos(x) \;;$$

(e) $y''(x) - \frac{y'(x)}{x} = 0$. Imponiamo $z(x) = y'(x)$ cosí da ottenere
$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 0$, vera se e solo se $\frac{z'(x)}{z(x)} = \frac{1}{x}$ che ci dice che
$z(x) = kx \Longrightarrow y'(x) = kx \Longrightarrow y(x) = k\frac{x^2}{2} + c$;

(f) $y'(x) + 3y(x) = 6$. Adoperando il solito cambio $y(x) = u(x)v(x)$ otteniamo che
$u(x) = e^{-3x}$ e $v(x) = c + \int 6e^{3x}dx = c + 2e^{3x}$ che ci dice che

$$y(x) = ce^{-3x} + 2 \;;$$

(g) $y'(x) - \frac{y(x)}{x^3-6x^2+11x-6} = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x^3-6x^2+11x-6}$ che ci dice che $\log|y(x)| = \int \frac{dx}{x^3-6x^2+11x-6} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
Applichiamo il metodo di integrazione di funzioni razionali:
$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{x^2(A+B+C)-x(5A+4B+3C)+(6A+3B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

vero solo se

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dunque
$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} = -\log(x-2) +$ $+\frac{1}{2}\log[(x-1)(x-3)] + c$.
Per cui $\log|y(x)| = \frac{1}{2}\log[(x-1)(x-3)] - \log(x-2) + c$ che ci dice che

$$y(x) = k\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{x-2} \; ;$$

(h) $y'(x) + x\tan(y(x)) = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{\tan(y(x))} = -x \Longleftrightarrow \frac{dy}{\tan(y)} = -x\ dx \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \log(\sin(y(x))) = -\frac{x^2}{2} + c \Longleftrightarrow \sin(y(x)) = Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, quindi

$$y(x) = \arcsin\left(Ke^{-\frac{x^2}{2}}\right) \; .$$

2. Il dato iniziale che trasforma una semplice equazione differenziale in un problema di Cauchy, é quel dato che rende la soluzione unica: tramite esso, cioé, diamo alla costante trovata nella soluzione dell'equazione un valore specifico che soddisfa tutto il sistema.

   (a) $y'(x) - \frac{y(x)}{x^2+1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x^2+1} \Longleftrightarrow \log|y(x)| = \arctan(x) + c$ dunque $y(x) = ke^{\arctan(x)}$.
   Dovendo essere $y(1) = 1$ otteniamo che $y(1) = ke^{\frac{\pi}{4}} = 1$ cioé $k = e^{-\frac{\pi}{4}}$.
   Pertanto

   $$y(x) = e^{(\arctan(x) - \frac{\pi}{4})}$$

   risolve il problema di Cauchy;

   (b) $y'(x) = 4y(x) \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = 4 \Longleftrightarrow \log|y(x)| = 4x + c$ dunque $y(x) = ke^{4x}$.
   Dovendo essere $y(0) = 3$ abbiamo che $k = 3$, cioé

   $$y(x) = 3e^{4x} \; ;$$

   (c) $y'(x) = 1 + y^2(x)$.
   Risulta abbastanza evidente senza far conti che

   $$y(x) = \tan(x)$$

   (essendo $\tan(0) = 0$ anche il dato iniziale é soddisfatto);

(d) $y'(x) = 2x^3 y(x) \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = 2x^3 \Longleftrightarrow \log|y(x)| = \frac{x^4}{2} + c$ da cui $y(x) = ke^{\frac{x^4}{2}}$. Per essere $y(0) = 1$ dovrá essere $k = 1$ e quindi

$$y(x) = e^{\frac{x^4}{2}} \ ;$$

(e) $y'(x) = x^2 y^4(x) \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y^4(x)} = x^2 \Longleftrightarrow \frac{dy}{y^4} = x^2 dx$ che ci dice che $-\frac{1}{3y^3} = \frac{x^3}{3} + c$, cioé $y(x) = -\sqrt[3]{\frac{1}{x^3+3c}}$.
Dovendo essere $y(1) = 2$ otteniamo $2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{1+3c}} \Longrightarrow c = -\frac{3}{8}$.
Dunque

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{9 - 8x^3}} \ ;$$

(f) $y'(x) - xy(x) = 2x^3$. Applichiamo la sostituzione $y(x) = u(x)v(x)$ ed il metodo visto nell'esercizio 1. Pertanto:
$u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ e $v(x) = c + \int 2x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$
$= c + 2(-x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx) = c - 2x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 4e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Dunque $y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}} - 2x^2 - 4$. Dovendo essere $y(0) = 1$ abbiamo che $c - 4 = 1 \Longrightarrow c = 5$, perció

$$y(x) = 5e^{\frac{x^2}{2}} - 2x^2 - 4 \ ;$$

(g) $y'(x) + y(x) = \sin(x)$. Con il solito metodo otteniamo che
$u(x) = e^{-x}$ e $v(x) = c + \int \sin(x)e^x dx$.
Sia $A := \int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx =$
$= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int sin(x)e^x dx = (\sin(x) - \cos(x))e^x - A$
quindi $A = \frac{(\sin(x)-\cos(x))e^x}{2} \Longrightarrow v(x) = c + \frac{(\sin(x)-\cos(x))e^x}{2}$
da cui $y(x) = ce^{-x} + \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$. Dovendo essere $y(0) = 0$ abbiamo che $c - \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow c = \frac{1}{2} \Longrightarrow y(x) = \frac{e^{-x}+\sin(x)-\cos(x)}{2}$;

(h) $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = e^x \Longrightarrow u(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = c + \int xe^x dx = c + xe^x - e^x$ da cui $y(x) = \frac{c-e^x}{x} + e^x$. Da $y(1) = 0$ otteniamo che $c = 0$ e dunque

$$y(x) = e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ ;$$

(i) $y'(x) + xy(x) = x \Longrightarrow u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e $v(x) = c + \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx =$
$= c + e^{\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow y(x) = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$.
Da $y(0) = 2$ otteniamo che $1 + c = 2 \Longrightarrow c = 1$ per cui

$$y(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}} \ ;$$

(j) $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x \Longrightarrow u(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = c + \int x^2 dx = c + \frac{x^3}{3}$
quindi $y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x^2}{3}$. Per essere $y(1) = \frac{1}{3}$ dovrá quindi essere $c = 0$ e dunque

$$y(x) = \frac{x^2}{3} \ ;$$

(k) $y'(x) = y(x) + x \Longrightarrow u(x) = e^x$ e $v(x) = c + \int xe^{-x}dx =$
$= c - xe^{-x} - e^{-x} \Longrightarrow y(x) = ce^x - x - 1$. Dovendo essere $y(0) = 1$ dovrá essere $c - 1 = 1 \Longrightarrow c = 2$ e dunque

$$y(x) = 2e^x - x - 1 \ ;$$

(l) $y'(x) = y(x)\sin(x) + \sin(x) \Longrightarrow u(x) = e^{-\cos(x)}$ e
$v(x) = c + \int \sin(x)e^{\cos(x)}dx = c - e^{\cos(x)} \Longrightarrow y(x) = ce^{-\cos(x)} - 1$.
Per essere $y(0) = 0$ dovrá essere $\frac{c}{e} - 1 = 0 \Longrightarrow c = e$ per cui

$$y(x) = e^{(1-\cos(x))} - 1 \ ;$$

(m) $xy'(x) + y(x) = x^2y(x) \Longleftrightarrow xy'(x) = (x^2 - 1)y(x) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = x - \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \log|y(x)| = \frac{x^2}{2} - \log(x) + c$ quindi
$y(x) = k\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x}$. Per essere $y(1) = 1$ dovrá essere $ke^{\frac{1}{2}} = 1$ quindi
$k = e^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow y(x) = \frac{e^{\frac{x^2-1}{2}}}{x}$;

(n) $y'(x) = y(x) - \arctan(x) + \frac{1}{x^2+1} \Longrightarrow u(x) = e^x$ e
$v(x) = c + \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \arctan(x)\right) e^{-x}dx = c + \int \frac{e^{-x}}{x^2+1}dx - \int \arctan(x)e^{-x}dx =$
$= c + \int \frac{e^{-x}}{x^2+1}dx + e^{-x}\arctan(x) - \int \frac{e^{-x}}{x^2+1}dx = c + e^{-x}\arctan(x)$.
Dunque $y(x) = ce^x + \arctan(x)$. Per essere $y(0) = 1$ dovrá essere $c = 1 \Longrightarrow y(x) = e^x + \arctan(x)$;

(o) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)} \Longleftrightarrow xy(x)y'(x) - y^2(x) = x^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow y(x)[xy'(x) - y(x)] = x^2 \Longleftrightarrow_{y(x)=u(x)v(x)}$
$\Longleftrightarrow u(x)v(x)[xu'(x)v(x) + xu(x)v'(x) - u(x)v(x)] = x^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow u(x)v(x)[v(x)(xu'(x) - u(x)) + xu(x)v'(x)] = x^2$.
Imponendo $xu'(x) - u(x) = 0$ otteniamo $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow u(x) = x$.
Sostituendo nell'equazione otteniamo $x^3v(x)v'(x) = x^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow v(x)v'(x) = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow vdv = \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \frac{v^2(x)}{2} = \log(x) + c$
che ci dice che $v(x) = \sqrt{2\log(x) + c} \Longrightarrow y(x) = x\sqrt{2\log(x) + c}$.
Con l'imposizione $y(1) = 1$ otteniamo che $c = 1$ e dunque

$$y(x) = x\sqrt{2\log(x) + 1} \ ;$$

(p) $y'(x) - \frac{y(x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{(x^2+1)^2} \Longleftrightarrow \log|y(x)| = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.
$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =_{(x=\tan(t))} \int \frac{dt}{\tan^2(t)+1} = \int \cos^2(t)dt = \frac{t+\sin(t)\cos(t)}{2} + c =$
$= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c = \frac{1}{2}\left(\arctan(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) + c$ essendo
$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = 2\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cos^2(t) = 2\frac{\tan(t)}{\tan^2(t)+1} =_{(t=\arctan(x))}$
$= \frac{2x}{x^2+1}$.
Pertanto $y(x) = ke^{\frac{1}{2}\left(\arctan(x)+\frac{x}{x^2+1}\right)}$. Dovendo essere$y(0) = 1$ si ha che $k = 1 \Longrightarrow y(x) = e^{\frac{1}{2}\left(\arctan(x)+\frac{x}{x^2+1}\right)}$;

(q) $y''(x) = (y'(x))^2$. Imponendo $z(x) = y'(x)$ otteniamo
$z'(x) = z^2(x) \Longrightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Longrightarrow -\frac{1}{z} = x + c \Longrightarrow z(x) = -\frac{1}{x+c}$.
Dunque $y'(x) = -\frac{1}{x+c} \Longrightarrow y(x) = -\int \frac{dx}{x+c} = -\log(x + c) + k$.

Da $y(0) = 0$ otteniamo $k = \log(c) \Longrightarrow y(x) = \log\left(\frac{c}{x+c}\right)$. Per trovare il valore di c dobbiamo usare la seconda condizione, data da $y'(0) = 1$.
Essendo $y'(x) = -\frac{1}{x+c}$ abbiamo che $-\frac{1}{c} = 1 \Longrightarrow c = -1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow y(x) = -\log(1-x)$;

(r) $y'(x) - \frac{y(x)}{x^2-1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x^2-1} \Longleftrightarrow \log|y(x)| = \int \frac{dx}{x^2-1}$.
$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right) dx = \int \frac{x(A+B)+(A-B)}{x^2-1} dx$.
Perché l'uguaglianza abbia un senso dovranno essere

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases},$$

pertanto $\log|y(x)| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c$ che ci dice che $y(x) = k\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Per rispettare $y(2) = 1$ dovrá essere
$k\sqrt{\frac{1}{3}} = 1 \Longrightarrow k = \sqrt{3} \Longrightarrow y(x) = \sqrt{\frac{3x-3}{x+1}}$;

(s) $y'(x) - 2y(x) = x^2 + x \Longrightarrow u(x) = e^{2x}$ e
$v(x) = c + \int (x^2+x)e^{-2x}dx = c - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + 2\int xe^{-2x}dx =$
$= c - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} - xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ da cui
$y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{2}(x+1)^2$. Per essere $y(0) = 2$ dovrá essere
$c - \frac{1}{2} = 2 \Longrightarrow c = \frac{5}{2} \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{2}(5e^{2x} - (x+1)^2)$;

(t) $y'(x) = y(x)\cos(x) + cos^3(x) \Longrightarrow u(x) = e^{\sin(x)}$ e
$v(x) = c + \int \cos^3(x)e^{-\sin(x)}dx =$
$= c - \cos^2(x)e^{-\sin(x)} - 2\int \cos(x)\sin(x)e^{-\sin(x)}dx =_{(t=\sin(x))}$
$= c - \cos^2(x)e^{-\sin(x) - 2\int te^{-t}dt} =$
$= c - cos^2(x)e^{-\sin(x)} + 2te^{-t} + 2e^{-t} =_{(t=\sin(x))}$
$= c - cos^2(x)e^{-\sin(x)} + 2\sin(x)e^{-\sin(x)} + 2e^{-\sin(x)}$ da cui
$y(x) = 2(1+\sin(x)) - cos^2(x) + ce^{\sin(x)}$. Per essere $y(0) = 0$ dovrá essere $2 - 1 + c = 0 \Longrightarrow c = -1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow y(x) = 2(1+\sin(x)) - \cos^2(x) - e^{\sin(x)}$;

(u) $y'(x) + y(x) = \sin(x) + 3\cos(2x) \Longrightarrow u(x) = e^{-x}$ e
$v(x) = c + \int \sin(x)e^x dx + 3\int \cos(2x)e^x dx$.
Procedendo con il solito metodo di integrare per parti 2 volte e poi portare il termine di partenza ri−ottenuto a sinistra dell'uguaglianza otteniamo
$\int \sin(x)e^x dx = \frac{e^x(\sin(x)-\cos(x))}{2}$ e $\int \cos(2x)e^x dx = \frac{e^x(\cos(2x)+2\sin(2x))}{5}$
cioé $v(x) = c + \frac{e^x(\sin(x)-\cos(x))}{2} + \frac{3}{5}e^x(\cos(2x) + 2\sin(2x))$ che ci dice che $y(x) = ce^{-x} + \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2} + \frac{3}{5}(\cos(2x) + 2\sin(2x))$.
Sostituendo $y(0) = 0$ otteniamo $c - \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 0 \Longrightarrow c = -\frac{1}{10}$, quindi

$$y(x) = -\frac{1}{10}e^{-x} + \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2} + \frac{3}{5}(\cos(2x) + 2\sin(2x)) ;$$

(v) $y'(x) - 2y(x) = \frac{e^{3x}}{e^x+1} \Longrightarrow u(x) = e^{2x}$ e
$v(x) = c + \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = c + \log(e^x+1)$. Dunque
$y(x) = ce^{2x} + e^{2x}\log(e^x+1)$.

Imponendo $y(0) = 0$ otteniamo che $c + \log(2) = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow c = -\log(2)$ e pertanto

$$y(x) = e^{2x} \log(\frac{e^x + 1}{2}) \ .$$

3. Paradossalmente il metodo per risolvere le equazioni differenziali di ordine superiore al primo é piú semplice di quello per risolvere le equazioni differenziali del primo ordine. Difatti anziché svolgere integrali, basterá fare derivate e trovare gli zeri di un determinato polinomio. Purtroppo i conti saranno **molto lunghi**.
   Supponiamo di avere l'equazione $\mathbf{y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0}$, $b, c \in \mathbb{R}$.
   Per risolverla associamo all'equazione un polinomio $P(\alpha)$ siffatto: imponendo
   $$\frac{d^n y}{dx^n} = \alpha^n$$
   otteniamo che $P(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c$. A questo punto risolviamo l'equazione $P(\alpha) = 0$:

   - Se $b^2 - 4c > 0$ abbiamo che le due radici del polinomio sono reali e distinte; chiamate esse α_1 e α_2 otteniamo che
     $$\mathbf{y(x) = Ae^{\alpha_1 x} + Be^{\alpha_2 x}} \qquad A, B \in \mathbb{R};$$
   - Se $b^2 - 4c = 0$ abbiamo che le due radici sono reali e coincidenti; chiamata tale radice β otteniamo che:
     $$\mathbf{y(x) = Ae^{\beta x} + Bxe^{\beta x}} \qquad A, B \in \mathbb{R};$$
   - Se $b^2 - 4c < 0$ abbiamo che le due radici sono complesse e coniugate; esse saranno $\gamma_1 = \mathrm{Re}(\gamma_1) + i\,\mathrm{Im}(\gamma_1)$ e $\gamma_2 = \overline{\gamma_1}$. In tal caso la soluzione sará:
     $$\mathbf{y(x) = Ae^{\mathrm{Re}(\gamma_1)x} \cos(\mathrm{Im}(\gamma_1)x) + Be^{\mathrm{Re}(\gamma_1)x} \sin(\mathrm{Im}(\gamma_1)x)} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

   Se l'equazione é di ordine superiore al secondo la procedura é analoga:

   - ad ogni radice reale con molteplicitá 1, δ, corrisponderá nella soluzione un elemento del tipo $Ke^{\delta x}$, $K \in \mathbb{R}$;
   - ad ogni radice reale ϵ di molteplicitá s corrisponderanno s elementi del tipo $K_1 e^{\epsilon x}, K_2 x e^{\epsilon x}, \cdots, K_s x^{s-1} e^{\epsilon x}$, con $K_1, \cdots, K_s \in \mathbb{R}$;
   - ad ogni coppia di radici complesse $\phi, \overline{\phi}$ corrisponderanno 2 elementi del tipo $K_1 e^{\mathrm{Re}(\phi)x} \cos(\mathrm{Im}(\phi)x), K_2 e^{\mathrm{Re}(\phi)x} \sin(\mathrm{Im}(\phi)x)$, con $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

   Se invece l'equazione da risolvere é del tipo $\mathbf{y''(x) + by(x) + cy(x) = f(x)}$, $b, c \in \mathbb{R}$, abbiamo che la soluzione é $\mathbf{y(x) = y_O(x) + y_P(x)}$, ove:

   - $y_O(x)$ é soluzione di $y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ ed é detta **soluzione omogenea**. Essa si trova con la procedura spiegata precedentemente;

- $y_P(x)$ é detta **soluzione particolare**. Per trovare essa dobbiamo procedere con il **metodo simpatia**:

  - Se $f(x) = e^{mx}, m \in \mathbb{R}$, allora

    $$y_P(x) = Kx^s e^{mx}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad s \text{ molteplicitá di } m \text{ come radice di } P(\alpha) \, ;$$

  - Se $f(x) = \sin(mx)$ oppure $f(x) = \cos(mx)$, $m \in \mathbb{R}$, allora

    $$y_P(x) = (K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx))(A_1 x + \cdots + A_s x^s), \quad K_i \in \mathbb{R},$$

    ove la parte $(A_1 x + \cdots + A_s x^s)$ appare solo se $m = \mathrm{Im}(\phi)$, $\phi \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ radice di $P(\alpha)$ di molteplicitá s ;
  - Se $f(x)$ é un polinomio, allora la soluzione particolare sará un polinomio dello stesso grado con i coefficienti non determinati (a meno che 0 non sia radice di $P(\alpha)$ di molteplicitá s: in tal caso il grado si alzerá di s);
  - Se $f(x)$ é prodotto di funzioni come quelle viste qui sopra, allora la soluzione particolare sará un'opportuna combinazione dei prodotti delle soluzioni particolari di essi.

  Ovviamente possono esserci altri tipi di $f(x)$, ma si procede sempre con lo stesso metodo nel caso.
  Una volta ottenuta la soluzione particolare opportuna bisognerá peró determinare i coefficienti affinché essa sia effettivamente particolare. Per fare esso basta inserire $y_P(x)$ al posto di $y(x)$ nell'equazione.

Per capirci meglio procediamo con la risoluzione degli esercizi assegnati:

(a) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{2x}$: sappiamo che $y(x) = y_O(x) + y_P(x)$, quindi andiamo a calcolarli.
Per calcolare $y_O(x)$ consideriamo gli zeri di $P(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha - 3$:

$$P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Longleftrightarrow \alpha_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} .$$

Quindi

$$y_O(x) = Ae^{3x} + Be^{-x}.$$

In questo caso (per quanto detto nello spiegone) $y_P(x) = Ke^{2x}$.
Per trovare K dobbiamo inserire $y_P(x)$ in $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{2x}$ al posto di $y(x)$, quindi ci occorono le derivate necessarie di $y_P(x)$:

$$y_P'(x) = 2Ke^{2x}, \quad y_P''(x) = 4Ke^{2x}$$

perció

$$4Ke^{2x} - 4Ke^{2x} - 3Ke^{2x} = e^{2x} \Longleftrightarrow -3Ke^{2x} = e^{2x} \Longleftrightarrow K = -\frac{1}{3}$$

e quindi $y_P(x) = -\frac{e^{2x}}{3}$. Dunque:

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{e^{2x}}{3} \; ;$$

(b) $y'''(x) - 2y''(x) - 4y'(x) + 8y(x) = 4x$: abbiamo che

$$P(\alpha) = \alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\alpha + 8 = (\alpha-2)^2(\alpha+2)$$

quindi

$$y_O(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Ce^{-2x} \ .$$

Non essendo 0 radice di $P(\alpha)$ abbiamo che $y_P(x) = A + Bx$.
Essendo $y'_P(x) = B$ e $y''_P(x) = y'''_P(x) = 0$ si ha che

$$y'''_P(x) - 2y''_P(x) - 4y'_P(x) + 8y_P(x) = 4x \iff -4B+8A+8Bx = 4x \iff \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi $y_P(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2x+1}{4}$ che ci dice che

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Ce^{-2x} + \frac{2x+1}{4} \ ;$$

(c) $y''''(x) - 4y(x) = 0$: in questo caso la soluzione omogenea é la soluzione dell'equazione differenziale.
$P(\alpha) = \alpha^4 - 4 = 0 \iff (\alpha^2-2)(\alpha^2+2) = 0$, quindi le 4 radici del polinomio sono

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad \alpha_3 = i\sqrt{2}, \quad \alpha_4 = \overline{\alpha_3} \ .$$

Dunque

$$y(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x} + C\cos(\sqrt{2}x) + D\sin(\sqrt{2}x) \ ;$$

(d) $y'''''(x) - 2y''''(x) + y'''(x) - y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$: abbiamo che $P(\alpha) = \alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha - 1 = (\alpha-1)^3(\alpha^2+\alpha+1)$, quindi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_5 = \overline{\alpha_4}$$

da cui

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x + De^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Ee^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \ ;$$

(e) $y'''''(x) - 5y''''(x) + 10y'''(x) - 10y''(x) + 5y'(x) - y(x) = e^x$:
La soluzione omogenea é

$$y_O(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x + Dx^3e^x + Ex^4e^x$$

essendo $P(\alpha) = (\alpha-1)^5$.
La soluzione particolare é $y_P(x) = Kx^5e^x$ per quanto detto nella spiegazione preliminare. Calcoliamoci le derivate opportune:

$$y'_P(x) = 5Kx^4e^x + Kx^5e^x$$

$$y''_P(x) = 20Kx^3e^x + 10Kx^4e^x + Kx^5e^x$$

$$y'''_P(x) = 60Kx^2e^x + 60Kx^3e^x + 15Kx^4e^x + Kx^5e^x$$

$$y_P''''(x) = 120Kxe^x + 240x^2e^x + 120Kx^3e^x + 20Kx^4e^x + Kx^5e^x$$

$$y_P'''''(x) = 120Ke^x + 600Kxe^x + 600x^2e^x + 200Kx^3e^x + 25Kx^4e^x + Kx^5e^x$$

Dunque

$$y_P'''''(x) - 5y_P''''(x) + 10y_P'''(x) - 10y_P''(x) + 5y_P'(x) - y_P(x) = e^x \iff$$

$$\iff 120Ke^x = e^x \iff 120K = 1 \iff K = \frac{1}{120} \implies y_P(x) = \frac{x^5e^x}{120}$$

da cui

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x + Dx^3e^x + Ex^4e^x + \frac{x^5e^x}{120} \ ;$$

(f) $y''''''(x) + y(x) = \sinh(x)$: dobbiamo calcolare le radici di $P(\alpha) = \alpha^6 + 1$. Notiamo inanzitutto che $P(\pm i) = 0$, che ci dice che $P(\alpha)$ é divisibile per $\alpha^2 + 1$. Effettuando la divisione otteniamo che $P(\alpha) = (\alpha^2 + 1)(\alpha^4 - \alpha^2 + 1)$. Cerchiamo la scomposizione su $\mathbb{R}$ di $\alpha^4 - \alpha^2 + 1$:

$$\alpha^4 - \alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + a\alpha + b)(\alpha^2 + c\alpha + d) \iff \begin{cases} c + a = 0 \\ d + b + ac = -1 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c = -a \\ b = \frac{1}{d} \\ d^2 + 1 - a^2d + d = 0 \\ ad^2 - a = 0 \end{cases} \iff_{a \neq 0} \begin{cases} d = b = 1 \\ a = \sqrt{3} \\ c = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\implies \alpha^4 - \alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha + 1)(\alpha^2 - \sqrt{3}\alpha + 1).$$

Ma

$$\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha + 1 = 0 \implies \alpha_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$$

$$\alpha^2 - \sqrt{3}\alpha + 1 = 0 \implies \alpha_{3,4} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

e pertanto

$$y_O(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + De^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ Ee^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + Fe^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) \ .$$

Si puó intuire facilmente che $y_P(x) = K\sinh(x)$. Essendo

$$y_P''''''(x) = y_P(x)$$

si ha che

$$y_P''''''(x) + y_P(x) = \sinh(x) \iff 2K\sinh(x) = \sinh(x) \iff K = \frac{1}{2} \implies y_P(x) = \frac{\sinh(x)}{2}$$

e dunque

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + De^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$+Ee^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + Fe^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sinh(x)}{2} \;;$$

(g) $y''(x) + y(x) = \sin(x)$: ovviamente

$$y_O(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

essendo $P(\pm i) = 0$. La soluzione particolare in questo caso sará

$$y_P(x) = K_1 x\sin(x) + K_2 x\cos(x)$$

per quanto detto in precedenza.
Le derivate di $y_P(x)$ che ci servono sono:

$$y_P'(x) = K_1\sin(x) + K_2\cos(x) + K_1 x\cos(x) - K_2 x\sin(x)$$

$$y_P''(x) = 2K_1\cos(x) - 2K_2\sin(x) - K_1 x\sin(x) - K_2 x\cos(x)$$

dunque

$$y_P''(x)+y_P(x) = \sin(x) \iff 2K_1\cos(x)-2K_2\sin(x)-K_1x\sin(x)-K_2x\cos(x)+$$

$$+K_1x\sin(x)+K_2x\cos(x) = \sin(x) \iff 2K_1\cos(x)-2K_2\sin(x) = \sin(x) \iff \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Dunque $y_P(x) = -\frac{x\cos(x)}{2}$ e quindi

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - \frac{x\cos(x)}{2} \;;$$

(h) $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = e^{2x}(1+\cos(x)) + 5x^2$: Per il caso omogeneo procediamo come fatto sino ad ora: $P(\alpha) = \alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0 \iff$ $\iff \alpha_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$, dunque

$$y_O(x) = Ae^{2x}\cos(x) + Be^{2x}\sin(x) \;.$$

Per semplificarci il lavoro, supponiamo

$$y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) + y_{P_3}(x)$$

con

$$y_{P_1}(x) = Ke^{2x} \;,$$
$$y_{P_2}(x) = K_1xe^{2x}\cos(x) + K_2xe^{2x}\sin(x) \;,$$
$$y_{P_3}(x) = K_3x^2 + K_4x + K_5 \;.$$

Cominciamo da $y_{P_1}(x) = Ke^{2x}$:

$$y_{P_1}'(x) = 2Ke^{2x}, \quad y_{P_1}''(x) = 4Ke^{2x}$$

quindi

$$y_{P_1}''(x)-4y_{P_1}'(x)+5y_{P_1}(x) = e^{2x} \iff Ke^{2x} = e^{2x} \iff K = 1 \implies y_{P_1}(x) = e^{2x} \;;$$

Poi: $y_{P_2}(x) = K_1 x e^{2x}\cos(x) + K_2 x e^{2x}\sin(x)$, quindi

$$y'_{P_2}(x) = (2K_1{+}K_2)xe^{2x}\cos(x){+}(2K_2{-}K_1)xe^{2x}\sin(x){+}K_1e^{2x}\cos(x){+}K_2e^{2x}\sin(x)\ ,$$

$$y''_{P_2}(x) = (3K_1{+}4K_2)xe^{2x}\cos(x){+}(3K_2{-}4K_1)xe^{2x}\sin(x){+}(4K_1{+}2K_2)e^{2x}\cos(x){+}$$
$$+(4K_2 - 2K_1)e^{2x}\sin(x)\ .$$

Dunque

$$y''_{P_2}(x){-}4y'_{P_2}(x){+}5y_{P_2}(x) = e^{2x}\cos(x) \iff 2K_2e^{2x}\cos(x){-}2K_1e^{2x}\sin(x) = e^{2x}\cos(x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2K_2 = 1 \\ -2K_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies y_{P_2}(x) = \frac{xe^{2x}\sin(x)}{2}\ ;$$

Infine $y_{P_3}(x) = K_3x^2 + K_4x + K_5$, perció

$$y'_{P_3}(x) = 2K_3x + K_4, \quad y''_{P_3}(x) = 2K_3$$

che ci dice che

$$y''_{P_3}(x){-}4y'_{P_3}(x){+}5y_{P_3}(x) = 5x^2 \iff 5K_3x^2{+}(5K_4{-}8K_3)x{+}(2K_3{-}4K_4{+}5K_5) = 5x^2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} K_3 = 1 \\ 5K_4 - 8K_3 = 0 \\ 2K_3 - 4K_4 + 5K_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_3 = 1 \\ K_4 = \frac{8}{5} \\ K_5 = \frac{22}{25} \end{cases} \implies y_{P_3}(x) = x^2{+}\frac{8}{5}x{+}\frac{22}{25}\ .$$

Quindi $y_P(x) = e^{2x} + \frac{xe^{2x}\sin(x)}{2} + x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{22}{25}$, pertanto

$$y(x) = Ae^{2x}\cos(x) + Be^{2x}\sin(x) + e^{2x} + \frac{xe^{2x}\sin(x)}{2} + x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{22}{25}\ .$$

4. Per risolvere i problemi di Cauchy dobbiamo procedere come fatto sinora. Una volta ottenuta la soluzione $y(x)$ andiamo a sostituire i dati iniziali per trovare i valori delle costanti:

   (a) $y'''(x) - y'(x) = 0$: Passiamo al polinomio associato $P(\alpha) = \alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)$ da cui

   $$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x}\ .$$

   Ora: $y'(x) = Be^x - Ce^{-x}$ e $y''(x) = Be^x + Ce^{-x}$, dunque

   $$\begin{cases} y''(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} B + C = 2 \\ B - C = 0 \\ A + B + C = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}\ .$$

   Pertanto
   $$y(x) = 1 + e^x + e^{-x} = 1 + 2\cosh(x)\ ;$$

(b) $y''''(x) + 2y''(x) + y(x) = 0$: $P(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$, quindi $\pm i$ sono radici con molteplicitá 2 e quindi

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Cx\cos(x) + Dx\sin(x).$$

Ora:

$$y'(x) = (B + C)\cos(x) + (D - A)\sin(x) - Cx\sin(x) + Dx\cos(x)$$

$$y''(x) = -(B+2C)\sin(x)+(2D-A)\cos(x)-Cx\cos(x)-Dx\sin(x)$$

$$y'''(x) = -(B+3C)\cos(x)+(A-3D)\sin(x)+Cx\sin(x)-Dx\cos(x)$$

dunque

$$\begin{cases} y'''(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -B - 3C = 1 \\ 2D - A = 1 \\ B + C = 1 \\ A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -1 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Pertanto

$$y(x) = \cos(x) + 2\sin(x) - x\cos(x) + x\sin(x) \ ;$$

(c) $y''(x) + 4y(x) = \sin(x)$: Cominciamo calcolando $y_O(x)$: $P(\alpha) = \alpha^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \alpha_{1,2} = \pm 2i$, quindi

$$y_O(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

La soluzione particolare sará $y_P(x) = K_1\sin(x)+K_2\cos(x)$, dunque

$$y'_P(x) = K_1\cos(x)-K_2\sin(x), \quad y''_P(x) = -K_1\sin(x)-K_2\cos(x) = -y_P(x)$$

quindi

$$y''_P(x)+4y_P(x) = \sin(x) \iff 3(K_1\sin(x)+K_2\cos(x)) = \sin(x) \iff \begin{cases} K_1 = \frac{1}{3} \\ K_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_P(x) = \frac{\sin(x)}{3}.$$

Abbiamo quindi che $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{\sin(x)}{3}$. Essendo $y'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{\cos(x)}{3}$ abbiamo che

$$\begin{cases} y'(0) = -\frac{2}{3} \\ y(0) = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 2B + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ A = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{e quindi}$$

$$y(x) = \frac{2}{3}\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\sin(x)}{3} \ ;$$

(d) $y'''(x)+y''(x)=1:$ abbiamo che $P(\alpha)=\alpha^3+\alpha^2=\alpha^2(\alpha+1)$, quindi

$$y_O(x)=A+Bx+Ce^{-x}.$$

La soluzione particolare sará dunque $y_P(x)=Kx^2$. Derivando otteniamo che

$$y_P'(x)=2Kx,\quad y_P''(x)=2K,\quad y_P'''(x)=0$$

quindi

$$y_P'''(x)+y_P''(x)=1 \iff 2K=1 \iff K=\frac{1}{2} \implies y_P(x)=\frac{x^2}{2}\ .$$

Pertanto $y(x)=A+Bx+Ce^{-x}+\frac{x^2}{2}$.
Ora

$$y'(x)=B-Ce^{-x}+x,\quad y''(x)=Ce^{-x}+1$$

quindi

$$\begin{cases} y''(0)=0\\ y'(0)=0\\ y(0)=0\end{cases} \iff \begin{cases} C+1=0\\ B-C=0\\ A+C=0\end{cases} \iff \begin{cases} A=1\\ B=-1\\ C=-1\end{cases}\ .$$

Pertanto

$$y(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\ ;$$

(e) $y'''(x)-4y'(x)=0:$ $P(\alpha)=\alpha^3-4\alpha=\alpha(\alpha-2)(\alpha+2)$, dunque $y(x)=A+Be^{2x}+Ce^{-2x}$.
Deriviamo:

$$y'(x)=2Be^{2x}-2Ce^{-2x},\quad y''(x)=4Be^{2x}+4Ce^{-2x}$$

quindi

$$\begin{cases} y''(0)=0\\ y'(0)=1\\ y(0)=0\end{cases} \iff \begin{cases} 4B+4C=0\\ 2B-2C=1\\ A+B+C=0\end{cases} \iff \begin{cases} A=0\\ B=\frac{1}{4}\\ C=-\frac{1}{4}\end{cases}\ .$$

Pertanto

$$y(x)=\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)=\frac{\sinh(2x)}{2}\ ;$$

(f) $y''(x)-8y'(x)+15y(x)=2e^{3x}:$ $P(\alpha)=\alpha^2-8\alpha+15=(\alpha-3)(\alpha-5)$, quindi

$$y_O(x)=Ae^{3x}+Be^{5x}\ .$$

Dunque $y_P(x)=Kxe^{3x}$. Derivando otteniamo che

$$y_P'(x)=Ke^{3x}+3Kxe^{3x},\quad y_P''(x)=6Ke^{3x}+9Kxe^{3x}$$

quindi

$$y_P''(x)-8y_P'(x)+15y_P(x)=2e^{3x} \iff -2Ke^{3x}=2e^{3x} \iff K=-1 \implies y_P(x)=-xe^{3x}.$$

Pertanto $y(x) = Ae^{3x} + Be^{5x} - xe^{3x}$.
Essendo $y'(x) = 3Ae^{3x} + 5Be^{5x} - e^{3x} - 3xe^{3x}$, abbiamo che

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3A + 5B - 1 = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi

$$y(x) = \frac{e^{5x}}{2} - \frac{e^{3x}}{2} - xe^{3x} \ ;$$

(g) $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = e^x$: $P(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 =$
$= (\alpha - 1)^3$, da cui

$$y_O(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x \ .$$

Dunque $y_P(x) = Kx^3e^x$. Deriviamo:

$$y'_P(x) = 3Kx^2e^x + Kx^3e^x$$

$$y''_P(x) = 6Kxe^x + 6Kx^2e^x + Kx^3e^x$$

$$y'''(x)_P(x) = 6Ke^x + 18Kxe^x + 9Kx^2e^x + Kx^3e^x \ .$$

Quindi

$$y'''_P(x) - 3y''_P(x) + 3y'_P(x) - y_P(x) = e^x \iff 6Ke^x = e^x \iff K = \frac{1}{6} \implies y_P(x) = \frac{x^3e^x}{6}.$$

Dunque $y(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x + \frac{x^3e^x}{6}$.
Ora:

$$y'(x) = (A+B)e^x + (B+2C)xe^x + Cx^2e^x + \frac{x^2e^x}{2} + \frac{x^3e^x}{6}$$

$$y''(x) = (A+2B+2C)e^x + (B+4C)xe^x + Cx^2e^x + xe^x + x^2e^x + \frac{x^3e^x}{6}$$

quindi

$$\begin{cases} y''(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \\ y(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A + 2B + 2C = 1 \\ A + B = 3 \\ A = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases} \ .$$

Dunque

$$y(x) = 2e^x + xe^x - \frac{3}{2}x^2e^x + \frac{x^3e^x}{6} \ ;$$

(h) $y'''''(x) - y''''(x) - y'(x) + y(x) = 0$: la soluzione ci é data dalle radici di $P(\alpha) = \alpha^5 - \alpha^4 - \alpha + 1 = (\alpha^4 - 1)(\alpha - 1) = (\alpha^2 + 1)(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2$, cioé

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Ce^{-x} + De^x + Exe^x \ .$$

Deriviamo:

$$y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) - Ce^{-x} + (D+E)e^x + Exe^x$$

$$y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x) + Ce^{-x} + (D+2E)e^x + Exe^x$$
$$y'''(x) = A\sin(x) - B\cos(x) - Ce^{-x} + (D+3E)e^x + Exe^x$$
$$y''''(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Ce^{-x} + (D+4E)e^x + Exe^x$$

quindi

$$\begin{cases} y''''(0)=0 \\ y'''(0)=0 \\ y''(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A+C+D+4E=0 \\ -B-C+D+3E=0 \\ -A+C+D+2E=0 \\ B-C+D+E=0 \\ A+C+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{8} \\ D=\frac{5}{8} \\ E=-\frac{1}{4} \end{cases} \implies$$

$$\implies y(x) = \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{e^{-x}}{8} + \frac{5e^x}{8} - \frac{1}{4}xe^x \ ;$$

(i) $y''(x) - y(x) = xe^x :\ \ P(\alpha) = \alpha^2 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1)$, quindi $y_O(x) = Ae^{-x} + Be^x$.
La soluzione particolare sarà

$$y_P(x) = (Kxe^x)(Ax+B) = K_1xe^x + K_2x^2e^x \ .$$

Deriviamo:

$$y_P'(x) = K_1e^x + (K_1+2K_2)xe^x + K_2x^2e^x$$
$$y_P''(x) = (2K_1+2K_2)e^x + (K_1+4K_2)xe^x + K_2x^2e^x$$

quindi

$$y_P''(x) - y_P(x) = xe^x \iff (2K_1+2K_2)e^x + 4K_2xe^x = xe^x \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2K_1+2K_2=0 \\ 4K_2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1=-\frac{1}{4} \\ K_2=\frac{1}{4} \end{cases} \implies y_P(x) = \frac{x(x-1)e^x}{4} \ .$$

Dunque $y(x) = Ae^{-x} + Be^x + \frac{x(x-1)e^x}{4}$.
Ma
$$y'(x) = -Ae^{-x} + Be^x + \frac{(x^2+x-1)e^x}{4}$$

quindi

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -A+B-\frac{1}{4}=0 \\ A+B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{8} \\ B=\frac{1}{8} \end{cases} \ .$$

Pertanto

$$y(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{8} + \frac{(x^2+x-1)e^x}{4} = \frac{\sinh(x) + (x^2+x-1)e^x}{4} \ ;$$

(j) $y''(x) + y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = \cos(x)$: $P(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2$, quindi

$$y_O(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bxe^{-\frac{x}{2}} \ .$$

Invece $y_P(x) = K_1\cos(x) + K_2\sin(x)$.
Deriviamo:

$$y_P'(x) = -K_1\sin(x) + K_2\cos(x), \quad y_P''(x) = -K_1\cos(x) - K_2\sin(x) \ ,$$

quindi

$$y_P''(x)+y_P'(x)+\frac{1}{4}y_P(x) = \cos(x) \iff \left(K_2 - \frac{3}{4}K_1\right)\cos(x) - \left(K_1 + \frac{3}{4}K_2\right)\sin(x) = \cos(x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} K_2\frac{3}{4}K_1 = 1 \\ K_1 + \frac{3}{4}K_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = -\frac{12}{25} \\ K_2 = \frac{16}{25} \end{cases} \implies y_P(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \ .$$

Pertanto $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bxe^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)$.
Quindi

$$y'(x) = \left(B - \frac{A}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{B}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + \frac{12}{25}\sin(x) + \frac{16}{25}\cos(x)$$

che ci dice che

$$\begin{cases} y'(0) = -\frac{43}{50} \\ y(0) = \frac{13}{25} \end{cases} \iff \begin{cases} B - \frac{A}{2} + \frac{16}{25} = -\frac{43}{50} \\ A - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \ .$$

E quindi

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} - xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \ ;$$

(k) $y''''(x) + 30y''(x) + 45y(x) = 0$: Essendo $P(\alpha) = \alpha^4 + 30\alpha^2 + 45$, dobbiamo scomporlo come prodotto di 2 polinomi di grado 2:

$$P(\alpha) = (\alpha^2+b\alpha+c)(\alpha^2+d\alpha+f) \iff \begin{cases} d + b = 0 \\ f + c + bd = 30 \\ bf + cd = 0 \\ cf = 45 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \\ c + f = 30 \\ cf = 45 \end{cases}$$

quindi c ed f sono le radici di $x^2 + 30x + 45$, cioé

$$c = -15 + 6\sqrt{5}, \quad f = -15 - 6\sqrt{5}$$

che ci dice che $P(\alpha) = (\alpha^2 + 15 - 6\sqrt{5})(\alpha^2 + 15 + 6\sqrt{5})$. Dunque $P(\alpha)$ ha 4 radici complesse

$$\lambda_1 = i\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}, \quad \overline{\lambda_1}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{15 + 6\sqrt{5}}, \quad \overline{\lambda_2}$$

che ci dice che

$$y(x) = A\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) + B\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) + C\cos(\mathrm{Im}(\lambda_2)x) + D\sin(\mathrm{Im}(\lambda_2)x) \ .$$

Andiamo a derivare

$$y'(x) = -A\,\mathrm{Im}(\lambda_1)\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) + B\,\mathrm{Im}(\lambda_1)\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) - C\,\mathrm{Im}(\lambda_2)\sin(\mathrm{Im}(\lambda_2)x) +$$
$$+D\,\mathrm{Im}(\lambda_2)\cos(\mathrm{Im}(\lambda_2)x)\ ,$$
$$y''(x) = -A(\mathrm{Im}(\lambda_1))^2\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) - B(\mathrm{Im}(\lambda_1))^2\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) - C(\mathrm{Im}(\lambda_2))^2\cos(\mathrm{Im}(\lambda_2)x) +$$
$$-D(\mathrm{Im}(\lambda_2))^2\sin(\mathrm{Im}(\lambda_2)x)\ ,$$
$$y'''(x) = A(\mathrm{Im}(\lambda_1))^3\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) - B(\mathrm{Im}(\lambda_1))^3\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) + C(\mathrm{Im}(\lambda_2))^3\sin(\mathrm{Im}(\lambda_2)x) +$$
$$-D(\mathrm{Im}(\lambda_2))^3\cos(\mathrm{Im}(\lambda_2)x)\ .$$

Quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \mathrm{Im}(\lambda_1)B + \ \mathrm{Im}(\lambda_2)D = 0 \\ -A(\mathrm{Im}(\lambda_1))^2 - C(\mathrm{Im}(\lambda_2))^2 = \sqrt{5} \\ -(\mathrm{Im}(\lambda_1))^3 B - (\mathrm{Im}(\lambda_2))^3 D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{12} \\ D = 0 \end{cases} .$$

Pertanto

$$y(x) = \frac{\cos\left(\left(\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}\right)x\right) - \cos\left(\left(\sqrt{15 + 6\sqrt{5}}\right)x\right)}{12}\ ;$$

(l) $y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0\ :\ P(\alpha) = \alpha^3 - 6\alpha^2 + +11\alpha - 6 = = (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)$, quindi $y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}$.
Deriaviamo:

$$y'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} + 3Ce^{3x}, \quad y''(x) = Ae^x + 4Be^{2x} + 9Ce^{3x}\ .$$

Dunque

$$\begin{cases} y''(\log(2)) = 3 \\ y'(\log(2)) = 2 \\ y(\log(2)) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2A + 4B + 8C = 3 \\ 2A + 8B + 24C = 2 \\ 2A + 16B + 72C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

e pertanto

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{16}e^{3x}\ .$$